19-10-20

- ## Η μη ομογενής δ.ε. πρώτης τάξης.

$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$, $t\in I$ $(p,q\in C(I))$

Πρόταση: Αν y είναι μία λύση της εξίσωσης (E) με $y(t_0)=y_0$ για κάποια $t_0\in I$, $y_0\in\mathbb{R}$, τότε η y δίνεται από τον τύπο:

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s)\, e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)\,du}\,ds\right],\ t\in I$$

Απόδειξη: Με πολλαπλασιασμό με το μη μηδενικό παράγοντα $e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$, βρίσκουμε $\left[y(t)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\right]' = q(t)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$.
απ' όπου με ολοκλήρωση στο διάστημα $[t_0,t]$, $t\in I$ παίρνουμε

$$y(t)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} q(s)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(u)\,du}\,ds$$

Με αόριστη ολοκλήρωση: $y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[C + \int q(t)e^{\int p(t)dt}\,dt\right]$, $t\in I$

Πρόταση: Το π.α.τ. : $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$, $y(t_0)=y_0$, $t\in I$
έχει ακριβώς μία λύση για οποιαδήποτε $t_0\in I$, $y_0\in\mathbb{R}$

Απόδειξη: Με παραγώγιση εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(u)\,du}\,ds\right],\ t\in I$$

είναι μία λύση του π.α.τ.
Αν y_1 είναι μία άλλη λύση του π.α.τ., τότε η συνάρτηση $u=y-y_1$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης που μηδενίζεται στο t_0, επομένως θα είναι $u=0$, και συνεπώς $y_1\equiv y_2$.

Παρατηρήσεις: • Η λύση της ομογενούς
• Τροχιές των λύσεων
• Μη μηδενικές λύσεις - το π.α.τ. με $y(t_0)=0$
• Πεδίο ορισμού των λύσεων
• Ασυνέχεια των p, q

Παραδείγματα - Ασκήσεις:

A-3(Λ): $y'+by=\sin(ax) \Rightarrow y(t)=e^{-bt}\left[y(0)+\int_0^t \sin(as)e^{bs}ds\right]=\ldots=$
$=ce^{-bx}+\frac{1}{a^2+b^2}\left[b\sin(ax)-a\cos(ax)\right]$

Είναι: $b\sin(ax)-a\cos(ax)=b\left[\sin(ax)-\frac{a}{b}\cos(ax)\right]=$
$=b\left[\sin(ax)-tg(\phi)\cos(ax)\right]=b\left[\sin(ax)-\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\cos(ax)\right]=$
$=b\left[\cos(\varphi)\sin(ax)-\sin(\varphi)\cos(ax)\right]=b(\sin(ax-\varphi))$

A-7(Λ): $b,k>0$, $\lambda\geq 0$

$y'+by=ke^{-\lambda x} \Rightarrow y(t)=e^{-bt}\left[y(0)+\int_0^t ke^{-\lambda s}e^{bs}ds\right]$

$\Rightarrow y(t)=e^{-bt}\left[y(0)+k\int_0^t e^{(b-\lambda)s}ds\right]$

Αν $b=\lambda$ τότε: $y(t)=e^{-bt}\left[y(0)+kt\right]$

ενώ αν $b\neq\lambda$ τότε: $y(t)=e^{-bt}\left[y(0)+\frac{k}{b-\lambda}\left(e^{(b-\lambda)t}-1\right)\right]=y(0)e^{-bt}+\frac{k}{b-\lambda}\left[\left(e^{-\lambda t}-e^{-bt}\right)\right]$

Για τα όρια των λύσεων στο $+\infty$ διακρίνουμε περιπτώσεις για $\lambda=0, >0$

A-5(Λ): $xy'-y\log y=x^2y$

Για $xy\neq 0$, έχουμε: $\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}\log y=x$

απ' όπου για $z=\log y$ και $z'=\frac{y'}{y}$ έχουμε: $z'-\frac{1}{x}=x$

Άλλος τρόπος: Παρατηρείστε ότι η εξίσωση γράφεται:

$$x\frac{y'}{y} - \log y = x^2 \Rightarrow \frac{x\cdot\frac{y'}{y} - \log y}{x^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\log y}{x}\right)' = 1$$

απ' όπου έχουμε: $\frac{\log y}{x} = x + c$

A-91(A): Αν $p, q \in C[0,\infty)$ με $\lim q(x) = 0$ και $p(x) \geq \mu > 0$, $x \geq x_0$ νδο όλες οι λύσεις της εξίσωσης $y' + py = q$ τείνουν προς το 0 για $x \to +\infty$.

Είναι $y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds\right]$

Επειδή $-p(s) \leq -\mu$, $s \geq x_0$ έχουμε: $-\int_{x_0}^{x} p(s)ds \leq -\int_{x_0}^{x} \mu\, dx = -\mu(x - x_0)$

και $|y(x_0)| e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \leq |y(x_0)| e^{-\int_{x_0}^{x} \mu ds} = y(x_0) e^{-\mu(x-x_0)} \to 0$

Γράφοντας, $e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds = \dfrac{\int_{x_0}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}}$

παρατηρούμε ότι αν ο αριθμητής είναι φραγμένη συνάρτηση (?) τότε το συμπέρασμα έπεται αμέσως, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ...

A-87: (σελ. 56). Να επιλυθεί η εξίσωση: $y' + 2y = q(t) := \begin{cases} 1 - |t|, & x \in [0,1] \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

Να βρεθεί η λύση y_0 για την οποία $y_0(0) = 1$.

Για $t \in [0,1]$ έχουμε $y' + 2y = 1 - t$ και:

$$y(t) = e^{-\int_0^t 2\,ds}\left[y(0) + \int_0^t (1-s) e^{-\int_0^s 2\,du} ds\right]$$

Για $t > 1$ έχουμε: $y(t) = e^{-\int_0^t 2\,ds}\left[y(0) + \int_0^t (1-s) e^{-\int_0^s 2\,du} ds\right] =$

$$= e^{-\int_0^t 2ds}\left[y(0) + \int_0^1 (1-s) e^{-\int_0^s 2du} ds + \int_1^t 0\, e^{-\int_0^s 2du} ds\right] =$$

$$= e^{-2t}\left[y(0) + \int_0^1 (1-s) e^{-\int_0^s 2du} ds\right]$$

Επομένως, είναι: $y(t)=\begin{cases} y(t)=e^{-2t}[y(0)+\int_0^t (1-s)e^{-2s}\,ds], \\ Ce^{-2t}, & t>1 \end{cases}$

με $C=[y(0)+\int_0^1 (1-s)e^{-2s}\,ds]$

Α-30: (σελ.57). Νδο για τυχούσες πραγματικές σταθερές c_1, c_2, c_3 η συνάρτηση

$$y(x)=\begin{cases} c_1(x^2-1)^2, & x<-1 \\ c_2(x^2-1)^2, & |x|\le 1 \\ c_3(x^2-1)^2, & x\geq 1 \end{cases}$$

είναι λύση της εξίσωσης: $(x^2-1)y'-4xy=0$, $x\in\mathbb{R}$

Να εξετασθεί το πλήθος των λύσεων του π.α.τ. $(x^2-1)y'-4xy=0$ για $y(0)=0$.

Υπόδειξη: Με χρήση του ορισμού της παραγώγου αποδείξτε ότι η συνάρτηση y είναι δύο φορές παρ/μη στα σημεία $-1, 1$ για οποιεσδήποτε τιμές των σταθερών.

Πχ Να μετασχηματισθεί σε διανυσματική εξίσωση πρώτης τάξης το π.α.τ.: $y^{(4)}+3t^2y^{(3)}-2\cos t\, y''+(3t+1)y=4e^t+1$.

Για $y_1=y$, $y_2=y'$, $y_3=y''$, $y_4=y'''$, έχουμε:

$y_1'=y'=y_2$, $y_2'=y''=y_3$, $y_3'=y'''=y_4$, $y_4'=y^{(4)}=-3t^2y^{(3)}+2\cos t\,y''-(3t+1)y+4e^t+1$.

και συνεπώς:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ -3t^2y_4+2\cos t\,y_3-(3t+1)y_1+4e^t+1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(3t+1) & 0 & 2\cos t & -3t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4e^t+1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή η εξίσωση τετάρτης τάξης γράφεται ως διανυσματική εξίσωση πρώτης τάξης με $\bar{y}'=A\bar{y}+\bar{b}$